Rouvière p306

DIFFÉRENTIELLE DE L'EXPONENTIELLE MATRICIELLE

156, 215
(220, 221)

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable en tout point, avec $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$d(\exp)(X)(H) = e^X \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[\cdot, X]^k}{(k+1)!} \right)(H) \qquad \text{où } [A,B] = AB - BA$$

▸ Une remarque préliminaire

Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, e^{tA} est la somme d'une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc on peut la dériver et l'intégrer terme à terme : ainsi, $\frac{d}{dt}[e^{tA}] = Ae^{tA} = e^{tA}A$ et $\int e^{tA}dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1}A^k}{(k+1)!}$.

On ADMET que exp est de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, exp est différentiable en tout point. Soit $(X,H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

▸ Reformulation de $d(\exp)(X)(H)$

On a $d(\exp)(X)(H) = D_H(\exp)(X) = \lim_{u \to 0} \frac{1}{u}[e^{X+uH} - e^X]$ (par différentiabilité la différentielle et la dérivée directionnelle coïncident), autrement dit $e^{X+uH} = e^X + u\, d(\exp)(X)(H) + \underset{u\to0}{o}(u)$, donc $e^{-X}e^{X+uH} = I_n + ue^{-X}d(\exp)(X)(H) + \underset{u\to0}{o}(u)$, et donc $\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u\to0}[e^{-X}e^{X+uH}] := \lim_{u\to0} \frac{\partial}{\partial u}[e^{-X}e^{X+uH}] = \lim_{u\to0}\frac{\partial}{\partial u}[I_n + u\,d(\exp)(X)(H) + \underset{u\to0}{o}(u)] = \lim_{u\to0}[d(\exp)(X)(H) + \underset{u\to0}{o}(1)] = d(\exp)(X)(H)$. (Attention ! Ça en a tout l'air, mais on n'a pas dérivé le $o(u)$!!! On a utilisé le théorème suivant : si f admet le développement limité $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors f' admet le développement limité $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}(x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$.) L'idée maintenant est d'exprimer $\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u\to0}[e^{-X}e^{X+uH}]$ d'une autre manière.

▸ Étude de la nouvelle expression

Pour $(u,t) \in \mathbb{R}^2$, posons $\varphi(u,t) = e^{-tX}e^{t(X+uH)}$ et $g(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Big|_{u\to0}(u,t)$. On a alors $g(1) = e^{-X}d(\exp)(X)(H)$ d'après ce qui précède. Comme exp est de classe C^2, φ l'est également, donc d'après le théorème de SCHWARZ,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial u}(u,t) = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right](u,t) = \frac{\partial}{\partial u}\left[-e^{-tX}Xe^{t(X+uH)} + e^{-tX}(X+uH)e^{t(X+uH)}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[e^{-tX}(-X+X+uH)e^{t(X+uH)}\right]$$

$$= e^{-tX}He^{t(X+uH)} + ue^{-tX}He^{t(X+uH)}\cdot tH \xrightarrow[u\to0]{} e^{-tX}He^{tX}$$

donc $g'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Big|_{u\to0}\right](u,t) = e^{-tX}He^{tX}$, et $g(0) = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u\to0}[e^0e^0] = 0$. De plus,

$$g''(t) = -Xe^{-tX}He^{tX} + e^{-tX}He^{tX}X = [e^{-tX}He^{tX}, X] = [\cdot, X](g'(t))$$

et $g'(0) = H$. On en déduit que $g'(t) = e^{t[\cdot,X]}(H)$.

> En effet, $\frac{d}{dt}\left[e^{-t[\cdot,X]}(g'(t))\right] = -e^{-t[\cdot,X]}([\cdot,X](g'(t))) + e^{-t[\cdot,X]}(g''(t)) = e^{-t[\cdot,X]}(g''(t) - [\cdot,X](g'(t))) = e^{-t[\cdot,X]}(0) = 0$,
> donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t[\cdot,X]}(g'(t)) = e^{-0\cdot[\cdot,X]}(g'(0)) = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(H) = H$. Ainsi, $g'(t) = e^{t[\cdot,X]}(H)$.

En intégrant $e^{t[\cdot,X]}$ terme à terme et en prenant $t=1$, il vient :

$$\boxed{d(\exp)(X)(H) = e^X g(1) = e^X\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[\cdot,X]^k}{(k+1)!}\right)(H)}$$

COMMENTAIRES :

- Attention à la nature des objets : à la fin, on mélange matrices et endomorphismes. Vous pouvez vous débarrasser de cette subtilité de 3 manières : soit en adaptant la rédaction avec des notations purement matricielles, soit avec des notations avec des endomorphismes uniquement (ce qui n'est pas la meilleure idée, surtout pour la leçon 156), soit en annonçant confondre les endomorphismes et leur matrice dans une base fixée.
- Rouvière présente les choses dans l'ordre inverse !